نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **آهنگ تغییر**

@sabertarkibi

سوال ۱

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع از ۲ تا } ۲+h = \frac{f(۲+h)-f(۲)}{۲+h-۲}$$

$$= \frac{(۲+h+\frac{۱}{۲+h})-(۲+\frac{۱}{۲})}{h} = \frac{۸}{۹}$$

$$\xRightarrow{h\neq ۰} ۲+h+\frac{۱}{۲+h}-\frac{۵}{۲} = \frac{۸}{۹}h \Rightarrow h+\frac{۱}{۲+h}-\frac{۱}{۲} = \frac{۸}{۹}h$$

$$\Rightarrow ۹h+\frac{۹}{۲+h}-\frac{۹}{۲} = ۸h \Rightarrow h+\frac{۹}{۲+h} = \frac{۹}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{h^۲+۲h+۹}{۲+h} = \frac{۹}{۲} \Rightarrow ۲h^۲-۵h = ۰ \Rightarrow \begin{cases} h = ۲/۵ \\ h = ۰ \end{cases}$$

سوال ۲

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

آهنگ متوسط تغییر در بازهٔ $[۱,۴]$:

$$\frac{f(۴)-f(۱)}{۴-۱} = \frac{(۱۲+\frac{۲}{۲})-(۳+۲)}{۳} = \frac{۸}{۳}$$

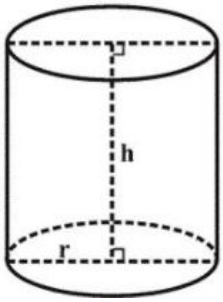
$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر در } x=\alpha = f'(\alpha) = ۳-\frac{۱}{\sqrt{\alpha^۳}}$$

$$\Rightarrow ۳-\frac{۱}{\sqrt{\alpha^۳}} = \frac{۸}{۳} \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{\alpha^۳}} = ۳-\frac{۸}{۳} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \sqrt{\alpha^۳} = ۳$$

$$\alpha^۳ = ۹ \Rightarrow \alpha = \sqrt[۳]{۹}$$

سوال ۳

پاسخ: گزینه ۲



مساحت کل استوانه : $S = ۲\pi rh + ۲\pi r^۲$

$\xrightarrow{h=۱۰} S = ۲۰\pi r + ۲\pi r^۲$

آهنگ لحظه‌ای تغییر مساحت : $S'(r) = ۲۰\pi + ۴\pi r$

$\Rightarrow S'(۴) = ۲۰\pi + ۱۶\pi \Rightarrow S'(۴) = ۳۶\pi$

سوال ۴

پاسخ: گزینه ۳

روش اول:

آهنگ متوسط در $[۰, ۱۰۰]$ $= \frac{V(۱۰۰)-V(۰)}{۱۰۰-۰} = \frac{۰-۴۰}{۱۰۰} = -\frac{۴۰}{۱۰۰}$

$V'(t) = ۸۰\left(\frac{-۱}{۱۰۰}\right)\left(۱-\frac{t}{۱۰۰}\right) = -\frac{۸}{۱۰}\left(۱-\frac{t}{۱۰۰}\right)$

$\Rightarrow -\frac{۴۰}{۱۰۰} = \frac{-۸}{۱۰}\left(۱-\frac{t}{۱۰۰}\right) \Rightarrow t = ۵۰$

روش دوم:

اگر $f(x) = ax^۲ + bx + c$ باشدآنگاه آهنگ متوسط تغییر در بازه $[a, b]$ با آهنگ لحظه‌ای تغییر در $x = \frac{a+b}{۲}$ برابر است؛ در نتیجه چون V یک تابع درجه ۲ است، لذا داریم:

آهنگ متوسط در $[۰, ۱۰۰]$ $= V'(t_۰) \Rightarrow t_۰ = \frac{۰+۱۰۰}{۲} = ۵۰s$

سوال ۵

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

مساحت مستطیل ABCD برابر است با $S(x) = x\sqrt{x}$. پس داریم:

$$\text{آهنگ متوسط در فاصله } [۱,۴] = \frac{S(۴)-S(۱)}{۴-۱} = \frac{۸-۱}{۳} = \frac{۷}{۳}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای}: S'(x) = \sqrt{x} + x\frac{۱}{۲\sqrt{x}} = \frac{۳}{۲}\sqrt{x}$$

$$\xrightarrow{S'(x)=\frac{۷}{۳}} \frac{۳}{۲}\sqrt{x} = \frac{۷}{۳} \Rightarrow x = \frac{۱۹۶}{۸۱}$$

سوال ۶

پاسخ: گزینه ۴

آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازه $[۰,a]$ برابر است با:

$$A = \frac{f(a)-f(۰)}{a-۰} = \frac{a^۳-۴a-۰}{a} = a^۲ - ۴$$

آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در $x = \sqrt{a}$ نیز برابر $f'(\sqrt{a})$ است:

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۴ \Rightarrow f'(\sqrt{a}) = ۳a - ۴ = B$$

$$\Rightarrow A - B = a^۲ - ۳a$$

حداقل مقدار $a^۲ - ۳a$ برابر $-\frac{۹}{۴}$ است که به ازای $a = \frac{۳}{۲}$ به دست می‌آید.

سوال ۷

پاسخ: گزینه ۲

$$d = \sqrt{x^۲ + (\sqrt{۷x+۴})^۲} = \sqrt{x^۲ + ۷x + ۴}$$

$$\Rightarrow \text{آهنگ لحظه‌ای تغییر } d = d' = \frac{۲x+۷}{۲\sqrt{x^۲+۷x+۴}}$$

$$\xrightarrow{x=۵} d' = \frac{۱۰+۷}{۲\sqrt{۲۵+۳۵+۴}} = \frac{۱۷}{۱۶}$$

سوال ۸

پاسخ: گزینه ۴

گزینه ۴

$$\text{آهنگ متوسط در بازه } [0,2] = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{4\times3-2}{2} = 5$$

$$f'(\tfrac{3}{4}) = \text{آهنگ لحظه‌ای در } x = \tfrac{3}{4}$$

به کمک رابطه $(f(x)g(x))' = g'(x)f(x) + f'(x)g(x)$، مشتق تابع f را می‌یابیم:

$$f'(x) = \sqrt{4x+1} + \frac{2(x+2)}{\sqrt{4x+1}}$$

$$\Rightarrow f'(\tfrac{3}{4}) = 2 + \frac{11}{4} = 4/75$$

$$\Rightarrow \text{آهنگ متوسط} - \text{آهنگ لحظه‌ای} = 0/25$$

سوال ۹

پاسخ: گزینه ۲

گزینه۲

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{f(4)-f(0)}{4-0} = \frac{\sqrt{9}+\frac{1}{5}-(\sqrt{1}+1)}{4-0} = \frac{1+\frac{1}{5}}{4}$$

$$= \frac{\frac{6}{5}}{4} = \frac{3}{10} = 0/3$$

$$f'(\tfrac{3}{2}) = \text{آهنگ تغییر لحظه‌ای در } x = \tfrac{3}{2}$$

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(\tfrac{3}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{(\frac{5}{2})^2} = \frac{1}{2} - \frac{4}{25} = 0/5 - 0/16 = 0/34$$

$$\Rightarrow \text{آهنگ تغییر لحظه‌ای} - \text{آهنگ تغییر متوسط} = 0/34 - 0/3 = 0/04$$

سوال ۱۰

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا ضابطه‌ی محیط دایره را برحسب مساحت آن می‌نویسیم و از آن نسبت به مساحت مشتق می‌گیریم:

$$S = \pi r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{S}{\pi}} \quad (1)$$

$$P = 2\pi r \xrightarrow{(1)} P(S) = 2\sqrt{\pi} \times \sqrt{S}$$

$$\Rightarrow P'(S) = 2\sqrt{\pi} \times \frac{1}{2\sqrt{S}} = \sqrt{\frac{\pi}{S}}$$

اگر محیط برابر 6πباشد، مساحت را به‌دست می‌آوریم:

$$P = 2\pi r = 6\pi \Rightarrow r = 3 \Rightarrow S = \pi r^2 = \pi(3)^2 = 9\pi$$

$$P'(S) = \sqrt{\frac{\pi}{S}} \xrightarrow{S=9\pi} P'(9\pi) = \sqrt{\frac{\pi}{9\pi}} = \frac{1}{3}$$